FHS St.Gallen
Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

Mathematischer Fitnesstest

zur Einschätzung der mathematischen Kenntnisse

Dr. Louis-Sepp Willimann, HSR Rapperswil

21.2.2007

Alle Aufgaben sind ohne Unterlagen, Formelbuch und Rechner zu lösen!

1 Aufgaben

Aufgabe 1:

Berechnen Sie

(a) $(1+\sqrt{2})^5 + (1-\sqrt{2})^5$

(b) $\dfrac{8^{4/3}\sqrt{2}}{2^{-3/2}}$

(c) $\log(\dfrac{100}{\sqrt[3]{10}})$ mit log = Logarithmus zur Basis 10

(d) $\sin^2(120°) + \cos(240°) + \tan(315°)$

(e) alle Winkel im Bogenmass zwischen 0 und 2π, deren Sinus -0.5 ist.

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{x|x(x-2)(x-4)(x-6) = 0\}$. Die Grundmenge sei $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

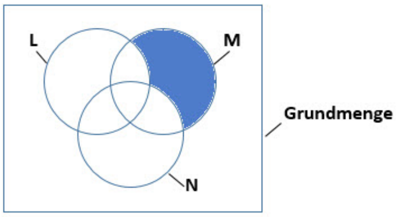
(a) Bestimmen Sie $\overline{A \cup B}$.

(b) Schreiben Sie alle Teilmengen von A auf.

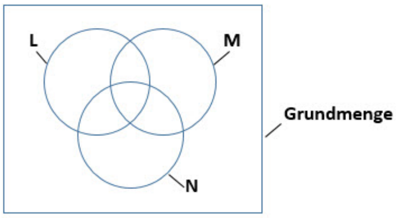
(c) Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? $\varnothing$ stellt die leere Menge dar.

- (i) $0 \in \{0\}$
- (ii) $0 \subset \{0\}$
- (iii) $\{0\} \in \{0\}$
- (iv) $\{0\} \subset \{0\}$
- (v) $\varnothing \in \{0\}$
- (vi) $\varnothing \subset \{0\}$
- (vii) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
- (viii) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

(d) Welche Menge stellt die schraffierte Fläche dar?



(e) Schraffieren Sie die Menge $M \cap (N \cup \overline{L})$.



Aufgabe 3:

Vereinfachen Sie so weit wie möglich

(a) $\dfrac{1}{(2a-3)(a-1)} - \dfrac{6}{4a^2-9} + \dfrac{5}{4a^2+2a-6}$

(b) $\dfrac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}}$

(c) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{ab^3}}{a^{-3}b}}$

(d) $\log(x^2 - y^2) + \log(\dfrac{1}{x-y}) - \log((x+y)^2)$

(e) $(\sin x + \cos x)^2 - \dfrac{2}{\tan x + \cot x}$

(f) $\dfrac{\sin(-x) + \cos(-x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(x+\pi) + \cos(x+2\pi) + \cos(x+3\pi)}$

Aufgabe 4:

(a) Welches ist der Winkel zwischen 0° und 90°, dessen Sinus gleich $\cos(1000^\circ)$ ist?

(b) Schreiben Sie den Term

$$\frac{a^{2/3}b^{-4/5}}{(a^{3/2}b^{-1/2})^{3/5}}$$

möglichst einfach mit lauter Potenzen mit natürlichen Exponenten und mit einer einzigen Wurzel.

(c) Schreiben Sie den Term

$$\frac{2\sin(90^\circ - \alpha) + \cos(\alpha + 180^\circ)}{\tan(\alpha + 90^\circ) - \cot(\alpha - 180^\circ)}$$

mit möglichst wenig trigonometrischen Funktionen.

(d) Schreiben Sie den Term

$$2\sin^2 x - 3\cos^2 x + \frac{4}{1+\tan^2 x}$$

mit möglichst wenig trigonometrischen Funktionen.

(e) Schreiben Sie mit möglichst wenig Logarithmen

$$\frac{2\log x - \frac{1}{3}\log y + \log(y^3) + \frac{3}{4}\log(\frac{1}{x})}{\log(x+y)\log(x-y)}$$

Aufgabe 5:

Lösen Sie folgende Gleichungen nach x.

(a) $\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{13} - \frac{1}{5x+11} + 7} = \frac{4}{21}$

(b) $\frac{1}{(1+\sqrt{3})^{x-1}} - 1 = \sqrt{2}$

(c) $\frac{a}{x^2-a^2} + \frac{b}{x^2-ax} = \frac{c}{x^2+ax}$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge bezüglich x.

(d) $\frac{11}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\ln(x^2+\mathbf{e})}$

(e) $\frac{\sqrt{3x+3}+1}{\sqrt{5x-6}} = 1$

(f) $\frac{1}{5-2x} > \frac{1}{1-\sqrt{2}}$

Aufgabe 6:

(a) Für welche Zahlen a hat die Gleichung

$$\frac{5}{4}x^2 - (2a^2 - 3)x + a^2 + 1 = 0$$

genau eine Lösung?

(b) Lösen Sie folgende Gleichungen nach x:

$$\ln^2 x + 1 = \ln(x^2) + a^2$$

(c) Von einem Kreissektor kennt man den Radius $r = 3\ cm$ und den Flächeninhalt $A = 9\ cm^2$. Berechnen Sie das Bogenmass $\overset{\frown}{\alpha}$ seines Winkels und seinen Bogen b.

(d) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem nach x, y und z:

$$\begin{aligned} 2x + 6y - 2z &= 13 \\ 4x + 10y + 4z &= 9 \\ 5x + 12y + 3z &= 15 \end{aligned}$$

(e) Für welchen Wert des Parameters b hat das folgende Gleichungssystem für x, y und z Lösungen? Geben Sie zwei verschiedene Lösungen an.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y - 2z &= 1 \\ x + 3y + 4z &= b \end{aligned}$$

2 Kurzlösungen

zu Aufgabe 1

(a) 82

(b) 64

(c) $\frac{5}{3}$

(d) $-\frac{3}{4}$

(e) $\frac{7\pi}{6}$ und $\frac{11\pi}{6}$

zu Aufgabe 2

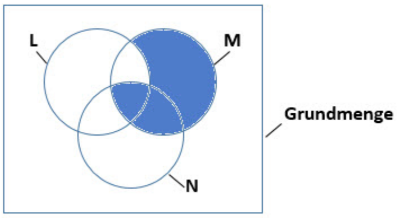
(a) $\{5, 7, 8, 9\}$

(b) $\{\quad\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

(c) Die folgenden Behauptungen sind richtig: (i), (iv), (vi) - (viii)

(d) $M \cap \overline{L} \cap \overline{N} = M \cap \overline{L \cup N}$

(e) Die gesuchte schraffierte Fläche ist



zu Aufgabe 3

(a) $\frac{1}{2(2a-3)(a-1)}$

(b) $\sqrt{1-x^2}$

(c) $\sqrt[6]{a^7 b}$

(d) $-\log(x+y)$

(e) 1

(f) -2

zu Aufgabe 4

(a) 10°

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[30]{a^7 b^{15}}}$

(c) $-\dfrac{\sin\alpha}{2}$

(d) $\sin^2 x + 1 = 2 - \cos^2 x$

(e) $\dfrac{\log(x^{5/4} y^{8/3})}{\log(x+y)\log(x-y)}$

Beachten Sie, dass der Nenner nicht vereinfacht werden kann!

zu Aufgabe 5

(a) $x = \dfrac{2}{5}$

(b) $x = 1 - \dfrac{\log(\sqrt{2}+1)}{\log(\sqrt{3}+1)}$

Für die beiden Logarithmen kann eine beliebige (aber natürlich die gleiche) Basis gewählt werden.

(c) $x = \dfrac{-ac-ab}{a+b-c} = \dfrac{a(b+c)}{c-a-b}$

(d) $\mathbb{L} = \varnothing$

(e) $\mathbb{L} = \{11\}$

(f) $\mathbb{L} = \{x | x < \frac{5}{2}\} \cup \{x | x > 2 + \sqrt{2}\}$

zu Aufgabe 6

(a) Die gegebene Gleichung hat für $a \in \{\pm 2, \pm 1/2\}$ genau eine Lösung.

(b) $x = \mathbf{e}^{1 \pm a}$

(c) $\overset{\frown}{\alpha} = 2$ und $b = 6\ cm$

(d) $x = 3,\ y = \frac{1}{2},\ z = -2$

(e) Das Gleichungssystem hat nur für $b = -1$ Lösungen.

Mögliche Lösungen sind z.B.

(i) $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2},\ z = 0$

(ii) $x = \frac{1}{3},\ y = 0,\ z = -\frac{1}{3}$